

Cap. 4 Energia

A análise da conservação da energia é surpreendentemente + complicada que para o momento. A principal razão: existe apenas 1 tipo de momento linear e 1 tipo de momento angular para uma partícula. Em contraste, a energia aparece em muitas formas diferentes: cinética, várias formas de energia potencial, térmica, etc.

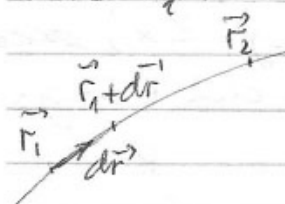
O que complica o uso da conservação da energia são os processos que transformam um tipo no outro.

Uma manifestação da dificuldade na discussão da energia é a necessidade de usar novas ferramentas do cálculo vetorial, tais como os conceitos de gradiente e rotacional.

4.1 Trabalho e energia cinética

Para uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$, $T = \frac{1}{2} m v^2$ ($v = |\vec{v}|$)

Acompanhemos as mudanças em T enquanto a partícula vai de $\vec{r}_1$ até $\vec{r}_1 + d\vec{r}$:



$$\begin{aligned} \dot{T} &= \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \\ &= \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) = m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \\ \frac{dT}{dt} &= \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\text{potência}}, \quad \text{e} \quad dT = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Este é o teorema do trabalho e da energia cinética (para 1 partícula), para um deslocamento infinitesimal. Para deslocamentos quaisquer (e.g., $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$),

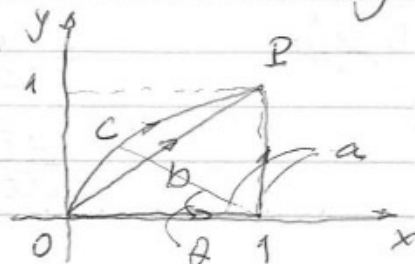
$$\Delta T = T_2 - T_1 = \lim \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

integral de linha, que é uma generalização da integral $\int f(x) dx$ sobre uma única variável.

Para calcular uma integral de linha, geralmente é possível convertê-la em uma integral ordinária - veja exemplo a seguir. Como o próprio nome sugere, uma integral de linha geralmente depende do caminho usado pela partícula para ir de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$. Para uma força $\vec{F}$ qualquer, aquela integral é chamada o trabalho feito pela força no deslocamento entre os pontos 1 e 2 ao longo do caminho.

Exemplo: Calcule o trabalho feito pela força bi-dimensional $\vec{F} = (y, 2x)$ sobre caminhos que vão da origem até o ponto $P = (1, 1)$.

caminho c: arco de círculo centrado em $Q = (1, 0)$



Caminho a: dividido em 2 partes ($O \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P$)

em OQ : $d\vec{r} = (dx, 0)$

em QP : $d\vec{r} = (0, dy)$. Logo,

$$\begin{aligned} W_a &= \int_a \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_0^1 F_x(x, 0) dx + \int_0^1 F_y(1, y) dy = \\ &= 0 + \int_0^1 2 dy = 2 \quad (\text{unidades de } W) \end{aligned}$$

Caminho b: $y = x \Rightarrow dy = dx$, e

$$\begin{aligned} W_b &= \int_b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_b (F_x dx + F_y dy) = \\ &= \int_0^1 (y + 2x) dx = \int_0^1 3x dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_0^1 = 1,5 \end{aligned}$$

- 01/04/09 -

Caminho c: escolho uma representação paramétrica $\rightarrow x = 1 - \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$\Rightarrow dx = \sin \theta d\theta$, $dy = \cos \theta d\theta$, e

$$\begin{aligned} W_c &= \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c (F_x dx + F_y dy) = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot \sin \theta d\theta + 2(1 - \cos \theta) \cos \theta d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \theta + 2(1 - \cos \theta) \cos \theta] d\theta \\ &= 2 - \frac{\pi}{4} = 1,21 \quad \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta ! \right) \end{aligned}$$

Com a notação da integral de linha,

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{W(1 \rightarrow 2)}_{\text{trabalho feito}}$$

pela força $\vec{F}$ no trajeto de 1 para 2.

(teorema do trabalho - energia cinética para deslocamentos arbitrários)

Importante lembrar: $W(1 \rightarrow 2)$ é o trabalho da resultante. Também podemos calculá-lo somando (algebricamente) os trabalhos feitos pelas forças individuais:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \text{ então,}$$

$$\begin{aligned} W(1 \rightarrow 2) &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \\ &= \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_i(1 \rightarrow 2) \end{aligned}$$

Claro que, se a força resultante $\vec{F} = 0$, $\Delta T = 0$ e a energia cinética é constante $\Rightarrow |\vec{v}|$ ~~se não se~~ não se altera (resultado correto, mas óbvio)

4.2 Forças conservativas e energia potencial

O próximo passo na construção do formalismo da energia é a introdução da noção de energia potencial associada às interações nas quais a partícula participa.

Lembre-se: isto não pode ser feito

para qualquer força (interação). Só podemos fazer isto para as forças conservativas, e precisamos discutir as propriedades que as caracterizam. Vamos ver que uma força precisa satisfazer a 2 condições (exigências) para ser conservativa.

Para simplificar, vamos começar considerando que só há uma força agindo sobre o objeto de interesse. Esta força $\vec{F}$ pode depender de várias variáveis diferentes: $\vec{r}$ (atração gravitacional), $\vec{v}$ (resistência do ar), e t (carga em campo elétrico dependente do tempo), por exemplo. Se o agente que faz a força $\vec{F}$ for vivo, uma série de outros fatores imponderáveis pode também interferir.

A primeira condição para que $\vec{F}$ seja conservativa é que ela dependa apenas de $\vec{r}$, a posição do objeto sobre o qual atua. Há muitas que atendem a esta exigência, $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ é um exemplo.

Outra: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, quando $\vec{E}(\vec{r})$ for estático. ($\partial\vec{E}/\partial t = 0$)

Entre as que não atendem destaque a força de atrito (cinético), que depende da direção (e sentido) da

velocidade, a força magnética, que depende de $\vec{v}$, além de outras já mencionadas.

A segunda condição é que o trabalho feito pela força entre quaisquer 2 pontos (1 e 2) seja independente do caminho.

Exemplo de força que não atende a esta condição: o atrito cinético (o trabalho depende do tamanho do caminho), além do exemplo resolvido há pouco.

Força que atende: $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (mostre!)
Neste caso, $W_g^{1 \rightarrow 2} = -mg\Delta h$ ($\Delta h = h_2 - h_1$)

Razão de ser do nome "conservativa": se todas as forças que agem sobre um objeto são conservativas, podemos definir uma ~~quantidade~~ quantidade chamada energia potencial (EP), $U(\vec{r})$, função apenas da posição, com a propriedade de que a energia mecânica total, definida por $E = T + U(\vec{r})$, seja constante: E é conservada.

Para definir a energia potencial que corresponde a uma dada interação (força): escolha arbitrariamente (mas inteligentemente ...) uma posição

de referência $\vec{r}_0$ na qual U seja definida como nula ($U(\vec{r}_0) = 0$). Por exemplo, no caso do campo gravitacional uniforme das vizinhanças da superfície da Terra, é muitas vezes conveniente definir o zero da energia potencial ~~em~~ num ponto na superfície. Podemos então definir $U(\vec{r})$ num ponto arbitrário por

$$U(\vec{r}) = -W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'.$$

Motivo do sinal negativo: já já ...

Esta definição só faz sentido se $W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r})$ for independente do caminho (por isto a exigência 2; e porque a exigência 1??)

Exemplo: carga em campo elétrico uniforme

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \Rightarrow \vec{F} = qE_0 \hat{x}$$

(a) $\vec{F}$ é conservativa:

$$\begin{aligned} W(1 \rightarrow 2) &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = qE_0 \int_1^2 \hat{x} \cdot d\vec{r} = \\ &= qE_0 \int_{x_1}^{x_2} dx = qE_0 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

(b) escolho $\vec{r}_0 = 0$ (origem), $U(\vec{r}_0) = 0$

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = -qE_0 x$$

Expressão do trabalho em termos da (variação da) energia potencial.

$$W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_2) = W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) + W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)$$

$$W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_2) - W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) =$$

$$= -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1) = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)]$$

$$W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = -\Delta U$$

Combine isto com o teorema trabalho-energia cinética:

$$\Delta T = W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = -\Delta U$$

$$\Delta T + \Delta U = 0 \quad (\text{por isso o sinal negativo!})$$

$$\Delta(T+U) = 0, \text{ e } E = T+U \text{ (energia mecânica)}$$

é constante!

Se a força sobre uma partícula é conservativa, sua energia mecânica nunca muda.

Este resultado é imediatamente generalizável se todas as forças que agem sobre a partícula forem conservativas, se definirmos

$$E = T + \sum_i U_i(\vec{r})$$

(princípio da conservação de energia para uma partícula).

Forças não conservativas

Não podemos definir energia potencial para uma força não-

conservativa, muito menos uma energia mecânica total conservada. Mas se há os 2 tipos de força atuando sobre uma partícula, continuamos podendo definir energia potencial para as conservativas. Vamos reescrever o teorema trabalho-energia cinética de modo a explicitar como as forças não-conservativas alteram ~~a~~ a energia mecânica da partícula.

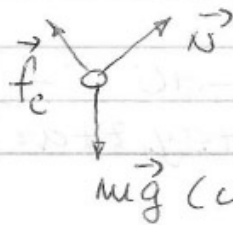
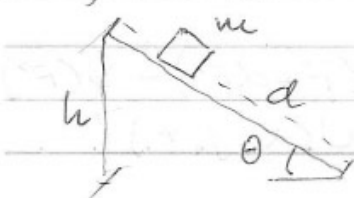
Vamos dividir a resultante em 2 partes, a conservativa $\vec{F}_c$ e a não-conservativa $\vec{F}_{nc}$, e chamemos de U a energia potencial associada a $\vec{F}_c$ (pode ser uma soma de vários termos). Pelo teorema trabalho-energia cinética,

$$\Delta T = W = \underbrace{W_c}_{-\Delta U} + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \Delta(T+U) = W_{nc} \quad \text{a energia}$$

mecânica não é conservada, e sua variação é o trabalho (resultante) das forças não-conservativas.

Exemplo: bloco descendo rampa



$m\vec{g}$ (conservation) ($U = mgy$)

$$W_{\text{atrito}} = \int \vec{f}_c \cdot d\vec{r} = -f d = -\mu N d$$

$$N = mg \cos \theta \Rightarrow W_{\text{at}} = -\mu mg d \cos \theta$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -mgh = -mg d \sin \theta$$

$$\Delta T = T_f - T_i = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - mg d \sin \theta = -\mu mg d \cos \theta$$

$$v = \sqrt{2gd(\sin \theta - \mu \cos \theta)}$$

(teste se a resposta faz sentido quando $\theta = \pi/2$, e $\theta = 0$ - + sutil...)

4.3 Força (conservativa) como o gradiente da energia potencial $\Rightarrow$

$$\text{Como } U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}',$$

isto sugere que $\vec{F}$ seja algum tipo de derivada de U .

Consideremos então uma partícula sobre a qual age uma força conservativa $\vec{F}$, e vamos examinar o trabalho feito em deslocamento $d\vec{r}$ (de 2 maneiras):

$$W(\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} W(\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}) &= -dU = -[U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r})] \\ &= -[U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z)] \end{aligned}$$

(1 variável)

MG4.11

Se $f = f(x)$, $df = f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx} dx$

Para funções de várias variáveis, o resultado que corresponde a este é

$$dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

(envolve derivadas parciais)

(o que são?)

$$\Rightarrow W(\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}) = - \left[\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right], e$$

identificamos $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$,

$$e \quad \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

-3/4/09-

(o campo eletrostático $\vec{E}$ se relaciona com o potencial V da mesma forma)

De forma geral, se $f(\vec{r})$ é função escalar,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad \text{é um vetor}$$

chamado o gradiente de f , e o símbolo ∇ de del (ou nãbla).

Com esta notação, se $\vec{F}_c$ e U são uma força conservativa e a energia potencial a ela associada,

$$\boxed{\vec{F}_c = -\nabla U}$$

e dizemos que $\vec{F}$

deriva de uma energia potencial. Provarmos que toda $\vec{F}_c$ é assim.

Exemplo: se $U = Axy^2 + B \sin Cz$ (A, B e C constantes), como é a força?

$$\vec{F} = - \left(Ay^2 \hat{x} + 2Axy \hat{y} + BC \cos Cz \hat{z} \right)$$

É às vezes conveniente escrever

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \text{ e interpretá-lo}$$

como um operador diferencial vetorial que, quando aplicado a uma função escalar $f(\vec{r})$, produz como resultado seu gradiente (um vetor).

Um uso prático do gradiente:

$$\begin{aligned} \cancel{d\vec{r}} \quad df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \\ &= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}, \text{ que é o} \\ \text{análogo 3-dimensional de } df &= \frac{df}{dx} dx \end{aligned}$$

4.4 A 2ª condição para que uma força $\vec{F}$ seja conservativa.

Ela é: $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

Podemos descobrir se isto é verdade com um teste simples, para o qual precisamos de +1 conceito básico do cálculo vetorial: a noção de rotacional de um vetor.

Pode-se demonstrar (usando o teorema de Stokes) que a condição acima é verdadeira se, e somente

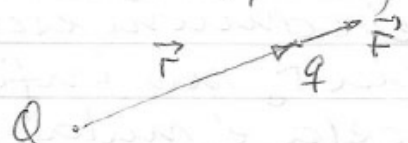
se, $\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Esta operação pode ser definida como o produto vetorial de $\vec{\nabla}$ (tratado como se suas componentes fossem números) por $\vec{F}$ - por exemplo, na forma de 1 determinante:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

(e $(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y$, por exemplo).

Exemplo: a força Coulombiana é conservativa? Encontre sua energia potencial, se ~~possível~~ existir.



$$\vec{F} = \frac{kqQ}{r^2} \hat{r} = \frac{\gamma}{r^3} \vec{r} =$$

$$= \frac{\gamma}{r^3} (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \quad (\gamma = kqQ)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma y}{r^3} \right) =$$

$$= \gamma z \frac{\partial}{\partial y} (r^{-3}) - \gamma y \frac{\partial}{\partial z} (r^{-3}), \text{ com}$$

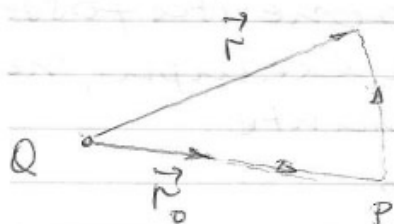
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \cdot 2y = \frac{y}{r}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \gamma z \left(\frac{-3}{r^4} \cdot \frac{y}{r} \right) - \gamma y \left(\frac{-3}{r^4} \frac{z}{r} \right) = 0$$

$$= (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \text{ e}$$

$\vec{F}$ é conservativa. (Provar que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ é muito + fácil em coordenadas esféricas...)



Para determinar

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Como esta integral independe do caminho, uso o caminho da figura. No 1º segmento, $\vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{\gamma}{r'^2} dr'$; no 2º, $\vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = 0$.

Logo,
$$U(\vec{r}) = - \int_{r_0}^r \frac{\gamma}{r'^2} dr' = \left[\frac{\gamma}{r'} \right]_{r_0}^r = \frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma}{r_0}$$

Por comodidade, é comum escolher k o ponto de referência $\vec{r}_0$ no infinito, e com isto a 2ª parcela é nula. Com esta escolha,

$$U(\vec{r}) = U(r) = \frac{kqQ}{r}$$

Vamos testar se $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$:

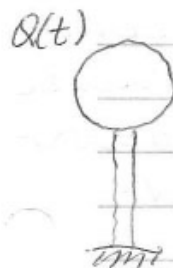
$$(\vec{\nabla} U)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma}{r} \right) = - \frac{kqQ}{r^3} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{kqQ}{r^3} x = -F_x$$

e idem para as outras componentes.

4.5 Energia potencial dependente do tempo
Há casos onde temos que considerar força $\vec{F}(\vec{r}, t)$ que satisfaz a 2ª condição mas não a primeira. Nestes casos,

ainda podemos definir uma energia potencial $U(\vec{r}, t)$ que satisfaz a $\vec{F} = -\nabla U$, mas a energia mecânica total $E = T + U$ não mais é conservada.

Exemplo: guado de van de Graaf descarregando (corrente de descarga)



$$\vec{F} = \frac{kqQ(t)}{r^2} \hat{r}$$

$$\text{Como } \nabla \times \vec{F} = 0$$

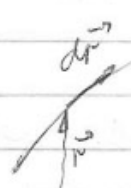
$$U(\vec{r}, t) = - \int_{\vec{F}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{r}' \quad (t \text{ é fixo})$$

e, portanto,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\nabla U(\vec{r}, t)$$

e dizemos que $\vec{F}$ é derivável de uma energia potencial dependente do tempo.

Ainda podemos definir $E = T + U$, que não é conservada: entre $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$,



$$dT = \frac{dI}{dt} dt = (m \vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(como antes); mas agora,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Logo,

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$d(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} dt = dE, \text{ que só}$$

será conservada se $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. ($\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}$)

11

Voltando ao exemplo do van de Graaf descarregando: se mantivermos q fixada (parada), T não muda mas U diminui até se anular. No entanto, apesar da energia mecânica não se conservar, a energia total o faz! A perda de energia mecânica é exatamente compensada pelo ganho de energia térmica associada ao aquecimento do ar provocada pela ~~descarga~~ corrente de descarga.

Este exemplo sugere que a energia potencial dependerá explicitamente do tempo exatamente naquelas situações nas quais a energia mecânica é transformada em outras formas de energia ou em energia mecânica de corpos externos ao sistema de interesse, o que é verdade.

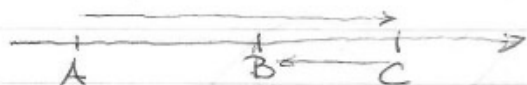
4.6 Energia em sistemas 1-dimensionais - trajetórias retilíneas

Tomemos o eixo x sobre a trajetória. A única componente da resultante $\vec{F}$ que pode realizar trabalho é F_x ; logo,

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx$$

Para a força ser conservativa, as 2 condições usuais devem ser satisfeitas. Mas ~~x~~ uma das coisas que torna

este problema interessante é que a 1ª condição já garante a 2ª: se F_x só depende de x , $\int_{x_1}^{x_2} F_x dx$ é independente do caminho, em particular porque há poucas escolhas possíveis.



Caminhos entre A e B: AB ou ABCB;
mas $W(ABCB) = W(AB) + W(BC) + W(CB)$;
como F_x só depende de x , $W(BC) = -W(CB)$
 $\Rightarrow W(ABCB) = W(AB)$.

Gráficos da energia potencial

Outra característica interessante: como U depende apenas de 1 variável, podemos fazer o gráfico de $U(x)$ e, com sua ajuda, visualizar o comportamento do sistema. Se todas as forças que agem sobre a partícula de interesse forem conservativas, definiremos a energia potencial

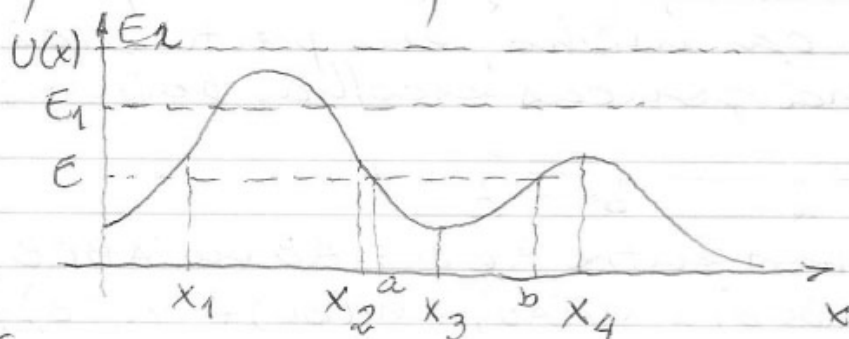
$$U(x) = - \int_{x_0}^x F_x(x') dx'$$

Como exemplo, se a partícula está presa a uma mola que obedece à lei de Hooke ($F_x = -kx$) e se escolhermos a posição de referência $x_0 = 0$,
 $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$.

Em uma dimensão, a equação $\vec{F} = -\nabla U$ fica + simples:

$$F_x = - \frac{dU}{dx}$$

Vamos inferir as informações que podemos obter do gráfico da energia potencial a partir de um exemplo:



Em

x_1 : a força $(-\frac{dU}{dx})$ é $\leftarrow$
 x_2 : " " " " $\rightarrow$

$\Downarrow$

a partícula sempre "desce a colina da energia potencial", e esta terminologia relembra o movimento de uma partícula que se move sobre um perfil como o do gráfico - que, nesta analogia, é simplesmente o gráfico da energia potencial gravitacional mgh .

x_3 e x_4 : $\frac{dU}{dx} = 0 = F_x \Rightarrow$ pontos de equilíbrio

x_3 : $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ (mínimo) $\Rightarrow$ equilíbrio estável

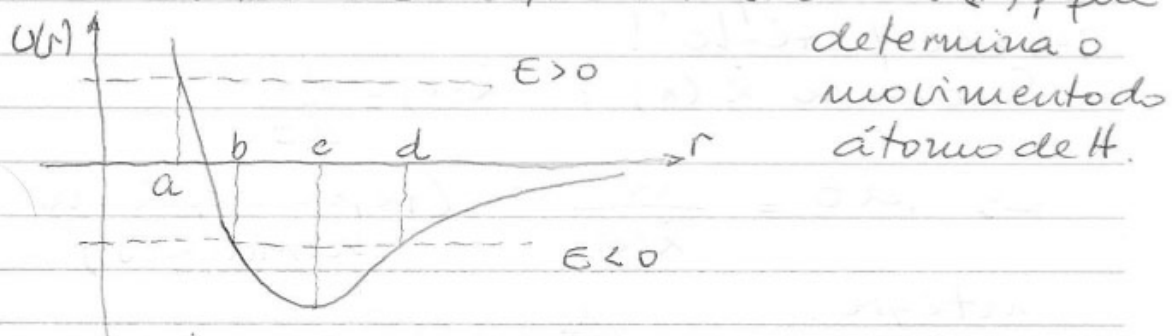
x_4 : $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ (máximo) $\Rightarrow$ equilíbrio instável

Se a partícula está se movendo: $T > 0$ e $E (= T + U) > U(x)$. Como E se conserva, pode ser representada por

uma reta horizontal no mesmo gráfico. Se a partícula está nas vizinhanças de x_3 , seu movimento é confinado ao segmento $[a, b]$ (análise este movimento): a e b são os pontos de retorno, nos quais $T=0$ e $E=U(a)=U(b)$.

Se a partícula está na mesma vizinhança mas com energia E_1 , o que acontece? E se sua energia é E_2 ?

Este tipo de análise é útil em muitas aplicações. Um exemplo da física molecular é mostrado a seguir: o gráfico ~~de~~ mostra a energia potencial de uma molécula diatômica típica (HCl , por exemplo) em função da distância entre os átomos (r), que



determina o movimento do átomo de H.

Análise da força de interação; Análise do movimento se $E > 0$ e se $E < 0$; Separação de equilíbrio (c); Estados com $E < 0$: molécula; Como formá-la, a partir de uma separação infinita (perda de energia por emissão de luz, por exemplo).

Soluções completa do movimento 1. dimensional

Outra característica notável dos sistemas conservativos em 1 dimensão é que podemos, pelo menos em princípio, usar a conservação da energia para obter a solução completa do movimento, isto é, x como função de t .
 $E = T + U$ é constante;

logo,

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - U(x),$$

$$\dot{x}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

Note a ambigüidade no sinal - afinal, T depende apenas de $|v|$. Esta ambigüidade pode, em geral, ser eliminada por inspeção direta - não se esqueça de fazê-lo!

Sabendo $\dot{x}(x)$: $\dot{x}(x) = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\dot{x}(x)} \quad (\text{separação de variáveis})$$

Integre:

$$t_f - t_i = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{\dot{x}(x)}$$

Supondo que $x(0) = x_0$ (e que $\dot{x}$ seja > 0),

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{2}}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}'$$

que pode ser invertida para obter $x(t)$.

Exemplo: queda livre de uma torre

Seixo x para baixo, $x_0 = 0$ no topo da torre $\Rightarrow U(x) = -mgx$

Em $x=0$, $v=0 \Rightarrow E=0$

$$\dot{x}(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)} = \sqrt{2gx}, \text{ e}$$

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{2gx'}} = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Este método pode ser usado para qualquer $U(x)$.

4.7 Energia em sistemas unidimensionais - trajetórias curvas

Se a posição pode ser especificada por um único número, o sistema é unidimensional, mesmo que sua trajetória não seja retilínea. Exemplos: conta em fio rígido, caminho de montanha russa. A posição é dada pela distância (com sinal) a partir de uma origem sobre a trajetória.

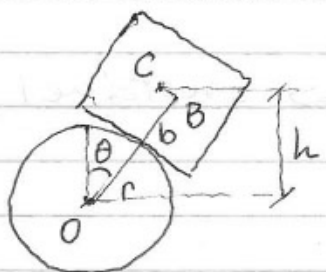
Com esta escolha, a discussão destes sistemas é semelhante ao caso anterior: a coordenada s sobre a trajetória corresponde à coordenada x . A velocidade (escalar) é $\dot{s}$ e

$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$. A força é um pouco +

complicada: a componente da resultante perpendicular à trajetória não mais é nula - ela é, de fato, o que restringe o movimento a ocorrer sobre a trajetória (força de vínculo). Por outro lado, ela não realiza trabalho (porque?) e podemos nos preocupar, neste contexto, apenas com a componente tangencial F_t . É fácil mostrar que $F_t = m\ddot{s}$ (problema da lista 6). Além disso, se todas as forças com componente tangencial não nula são conservativas, podemos definir uma energia potencial associada à resultante $U(s)$ tal que $F_t = -\frac{dU}{ds}$ e uma energia mecânica total conservada $E = T + U(s)$. Toda a discussão da seção anterior se aplica ao caso em tela - em particular, os pontos onde $U(s)$ passa por um mínimo (local) são posições de equilíbrio estável e aqueles onde $U(s)$ é máxima são posições de equilíbrio instável. Alguns sistemas aparentemente complicados podem ser tratados de forma simples se reconhecermos seu caráter unidimensional.

Exemplo: estabilidade de um cubo apoiado sobre um cilindro

Cilindro de borracha dura de raio r é mantido fixo com seu eixo horizontal; sobre ele equilibramos cubo de madeira de massa m e aresta $2b$, com seu centro verticalmente acima do eixo do cilindro e 4 arestas paralelas a este eixo. O cubo não pode escorregar sobre o cilindro mas pode balançar.



Sistema unidimensional: posição especificada pelo ângulo θ .

Forças de vínculo:

atrito entre cilindro e cubo e normal do cilindro sobre o cubo — não realizam trabalho. Sobre o cubo age também seu peso, que é conservativo:

$U = mgh$ (por escolha). Os segmentos $\overline{OB} = r + b$ e $\overline{BC} = r\theta$ (o quanto o cubo rola sobre o cilindro). Portanto,

$$h = (r + b) \cos \theta + r\theta \sin \theta, \text{ e}$$

$$U(\theta) = mg[(r + b) \cos \theta + r\theta \sin \theta]$$

As posições de equilíbrio são aquelas onde $\frac{dU}{d\theta} = 0$:

$$\frac{dU}{d\theta} = mg[-(r + b) \sin \theta + r \cos \theta + r \sin \theta]$$

$$= mg[r \cos \theta - b \sin \theta]$$

que se anula quando $\theta = 0$ (mas é óbvio??). Para determinar a esta-

bilidade:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg [-r\theta \sin\theta + r \cos\theta - b \cos\theta]$$

$$= mg [(r-b) \cos\theta - r\theta \sin\theta], \text{ e,}$$

se $\theta=0$,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg (r-b)$$

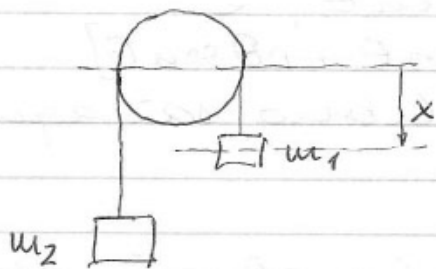
Se $b < r$ (cubo menor que o cilindro)

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} (\theta=0) > 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável}$$

Se $b > r$, $\frac{d^2U}{d\theta^2} (\theta=0) < 0 \Rightarrow \text{instável}$

Outras generalizações

Sistemas compostos por muitos corpos podem ser unidimensionais - bastam que estejam ligados por vínculos que possibilitem especificar a posição do sistema por um único parâmetro. Um exemplo: a máquina de Atwood.



(fios inextensíveis e sem massa, roldana sem atrito)

As forças de vínculo obrigam m_2 a se mover para cima a mesma

distância que m_1 se move para baixo (ou vice-versa) $\Rightarrow$ a posição do sistema pode ser especificada por um único parâmetro, o x da figura por exemplo.

Como o peso é conservativo, podemos introduzir energia potencial a ele associado. Do que discutimos antes, temos:

$$\Delta T_1 + \Delta U_1 = W_1^{\text{tensas}} \quad (\text{massa } m_1)$$

e

$$\Delta T_2 + \Delta U_2 = W_2^{\text{tensas}} \quad (m_2)$$

Mas se não há atrito na polia e a massa do fio é desprezível, $W_1^t = -W_2^t$ (porque?); logo, somando as 2 equações obtemos

$$\Delta (T_1 + U_1 + T_2 + U_2) = 0, \text{ e}$$

$$E = T_1 + U_1 + T_2 + U_2 \text{ é conservada.}$$

todas as referências às forças de vínculo (da roldana e do fio) desapareceram.

Como neste exemplo, em muitos sistemas compostos de muitos corpos as forças de vínculo - que são cruciais na determinação de como o sistema se move - realizam trabalho total nulo sobre o sistema: ao considerar a energia mecânica destes sistemas podemos ignorá-las. Em particular, se as demais forças são conservativas, podemos associar uma energia potencial a cada partícula e a energia total

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (T_{\alpha} + U_{\alpha}) \text{ é conservada.}$$

Se, além disso, o sistema for unidimensional (posição especificada por um único parâmetro), tudo o que fizemos na seção anterior a eles se aplica.

Uma discussão cuidadosa dos sistemas sujeitos a vínculos fica mais simples na formulação Lagrangeana da mecânica do que na Newtoniana. Retomarei, portanto, este tema depois de tê-la apresentado.

4.8 Forças centrais

Uma situação em 3-D que tem muito da simplicidade de problemas unidimensionais é aquela de uma partícula sujeita à ação (exclusiva) de uma força central, uma força que tem sempre a direção que liga a posição da partícula a um ponto fixo do espaço. Se escolhermos este último como origem,

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \hat{r}$$

descreve a intensidade (módulo) e o sentido da força. Um exemplo é a força coulombiana feita sobre uma carga q por outra Q fixa (na origem):

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k q Q}{r^2} \hat{r}$$

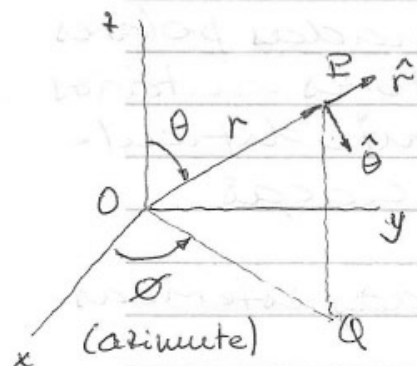
onde $f(\vec{r}) = \frac{kqQ}{r^2}$. Além de ser central esta força possui outras 2 propriedades, mas necessariamente partilhadas por outras forças centrais:

(i) é conservativa;

(ii) é esfericamente simétrica (ou, o que é o mesmo, é invariante por rotações): $f(\vec{r})$ não depende da direção de $\vec{r} \Rightarrow f(\vec{r}) = f(r)$

Uma característica marcante das forças centrais é que, nelas, estas 2 propriedades sempre andam juntas: se uma é atendida, a outra também o é. Vou demonstrar isto, mas antes preciso rever a definições das coordenadas polares esféricas (a demonstração fica + fácil com estas coordenadas, e elas são muito úteis em vários outros problemas de física).

Coordenadas polares esféricas



Podemos especificar o vetor posição $\vec{r}$ por:

- coordenadas cartesianas

$$(x, y, z)$$

- coordenadas esféricas

$$(r, \theta, \phi)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

15-4-09

Um dos muitos usos destas coordenadas: especificar posições sobre a superfície do planeta:

θ : colatitude (latitude medida a partir do polo)
 ϕ : longitude

Se $f(\vec{r})$ é esfericamente simétrica, $f(\vec{r}) = f(r)$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$

Os vetores unitários $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ são definidos da maneira usual - e são diferentes de ponto para ponto! Por exemplo, $\hat{\phi}$ aponta na direção crescente de ϕ , r e θ mantidos fixos $\Rightarrow$ tangente a um círculo de latitude fixa.

Eles são ortogonais entre si e, por isso, o produto escalar nestas coordenadas é calculado de forma similar às coordenadas cartesianas, se

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi} \text{ e } \vec{b} = b_r \hat{r} + b_\theta \hat{\theta} + b_\phi \hat{\phi}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_r b_r + a_\theta b_\theta + a_\phi b_\phi$$

Como no caso das coordenadas polares em 2D, a variação dos vetores unitários $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ de ponto para ponto dificulta as operações de diferenciação.

O gradiente em coordenadas esféricas
Em coord. cartesianas,

$$\vec{\nabla} f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Vamos ver como isto fica em coordenadas esféricas. Para isto, lembre que, independente de coordenadas,

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}, \text{ e}$$

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$$

Logo,

$$df = (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r d\theta + (\nabla f)_\phi r \sin\theta d\phi$$

Por outro lado, se $f = f(r, \theta, \phi)$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi, \text{ donde}$$

concluimos que

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}; \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta};$$

$$(\nabla f)_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \text{ ou}$$

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

Considerações parecidas se aplicam ao rotacional e outros operadores do cálculo vetorial, tornando-os mais complicados nestas (e outras) coordenadas não-cartesianas.

Forças centradas conservativas e esfericamente simétricas

Vou provar a afirmação feita anteriormente de que uma destas propriedades implica na outra. Suponha, portanto, que $\vec{F}(\vec{r})$ seja conservativa;
central

Logo, $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U = -\hat{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}$

Como $\vec{F}$ é central,

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0, \text{ e}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\hat{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

Como U é esfericamente simétrica (não depende de θ e ϕ , só de r), o mesmo ocorre com $\frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow$ e com $\vec{F}(\vec{r})$.

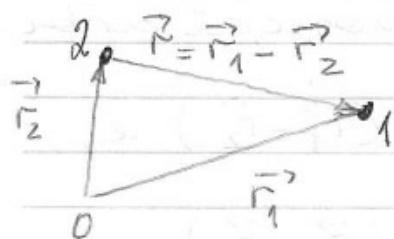
A demonstração da recíproca fica para a lista de exercícios.

Importância deste resultado:

- como uma força central e conservativa tem módulo que só depende de r (1 parâmetro), é quase tão simples quanto uma força unidimensional
- apesar de $\vec{F}(\vec{r})$ não ser exatamente uma força unidimensional (sua direção depende de θ e ϕ) veremos + tarde que qualquer problema envolvendo este tipo de força é matematicamente equivalente a um problema unidimensional relacionado com o problema original.

4.9 - Energia de interação de duas partículas
Vamos estender a discussão anterior, começando com sistemas de 2 partículas.

Elas interagem através de forças $\vec{F}_{21}$ (de 1 sobre 2) e $\vec{F}_{12}$ (de 2 sobre 1) e vamos supor não existam outras forças (externas). Em geral, a força $\vec{F}_{12}$ po-



deria depender das posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \text{ e, pela 3ª lei, } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Exemplo: estrela binária isolada

$$\vec{F}_{12} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = - \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

com $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e $r = |\vec{r}|$

$$\vec{F}_{12} = - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Uma importante propriedade desta força é que ela depende das posições apenas através da combinação $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, o que se verifica em qualquer sistema isolado de 2 partículas e não é acidental. Razão: sistema isolado deve ser invariante sob translações (do sistema como um todo). (porque?)

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Em particular, se escolhermos a origem sobre a partícula 2, $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1)$ e $\vec{F}_{12}$ será conservativa se $\nabla_1 \times \vec{F}_{12} = 0$

onde $\nabla_1 = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z_1}$, e, neste

caso, podemos definir ^{uma} energia potencial $U(\vec{r}_1)$ tal que $\vec{F}_{12} = -\nabla_1 U(\vec{r}_1)$. Movendo a origem para posições arbitrária, temos

$\vec{F}_{12} = -\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ e, pela 3ª lei, teremos

$$\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\nabla_2 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

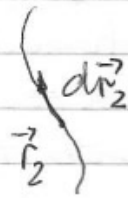
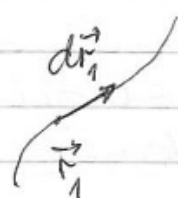
(regra da cadeia)

e $\vec{F}_{21} = -\nabla_2 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

Estes resultados podem ser generalizados para sistemas de muitas partículas, como veremos.

Em síntese: existe uma única energia potencial da qual podemos obter, por derivadas, ambas as forças.

Como expressar a conservação de energia em sistemas de 2 partículas?



Do teorema trabalho-energia cinética:

$$dT_1 = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1$$

$$dT_2 = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2, \text{ e}$$

$$dT = d(T_1 + T_2) = W_{\text{total}} = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 =$$

$$= \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = -\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$= -\nabla U(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow d(\underbrace{T+U}_E) = 0$$

Importante ressaltar que o trabalho total é a soma de 2 termos, mas a energia potencial leva automaticamente em conta os 2, e $W_{\text{total}} = -dU$.

Resultado:

$E = T + U = T_1 + T_2 + U$, a energia total, é conservada.

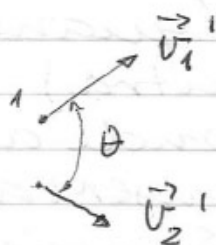
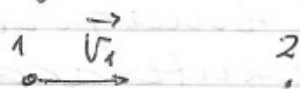
Colisões elásticas: uma aplicação simples destas idéias. Consideremos colisões entre 2 partículas que interagem através de força conservativa, que vai a zero quando a separação entre elas $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ aumenta. Como $\vec{F}_{12} \rightarrow 0$ quando $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty \Rightarrow U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rightarrow \text{constante}$ - que podemos tomar como nula. As 2 partículas podem ser 1 elétron e 1 próton, ou 2 bolas de bilhar (não é óbvio que a força de interação neste último caso seja conservativa, mas "boas" bolas de bilhar são fabricadas de modo que se comportem praticamente como 2 molas quando comprimidas uma com outra). É fácil imaginar casos onde a força de interação não seja conservativa, e as colisões nestes não serão elásticas.

Numa colisão, as 2 partículas estão inicialmente longe, se aproximam, e depois se afastam de novo.

Como as forças são conservativas, E se conserva $\Rightarrow T + U (= T_1 + T_2 + U)' =$ constante. Mas quando as partículas estão muito distantes, $U = 0$
 $\Rightarrow T_{ini} = T_{final}$ (e esta igualdade só se verifica nesta situação!)

Para colisões ser elásticas, é necessário que seu produto final sejam as mesmas 2 partículas iniciais: problemas com bolas que quebram, e graus de liberdade internos às "partículas", criação (relativística) de novas partículas. Para energias muito altas, a hipótese de que ~~os~~ os ~~partículas~~ que tomam parte na colisão possam ser considerados como partículas indivisíveis não se justifica, mesmo que as forças de interação sejam conservativas. Para energias + baixas, a aproximação pode funcionar bem.

Exemplo: colisão elástica de massas iguais



Cons - momento: $m \vec{v}_1 = m \vec{v}_1' + m \vec{v}_2'$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

col. elástica: $\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2$$

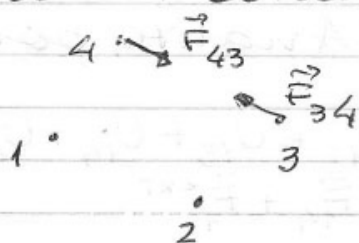
Quadrando a 1ª eq,

$$\vec{v}_1^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2 + 2 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$$

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$$

4.10. Energia de sistema de muitas partículas

A complicação é só de notações ($\vec{r}_i$).
Vamos começar com 4 partículas:



(com interações externas também).

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2$$

Energia potencial: vamos supor que $\vec{F}_{\alpha\beta}$ não seja afetada pela presença das demais partículas, internas ou externas. Vamos focalizar o par 3-4: podemos definir $U_{34}(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)$ tal que

$$\vec{F}_{34} = -\nabla_3 U_{34} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{43} = -\nabla_4 U_{34}$$

O mesmo vale para os demais pares 1-2, 1-3, etc, e, para cada um, definimos energia potencial correspondente U_{12}, U_{13} , com a propriedade acima.

Cada uma das forças (resultantes) externas $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$ só depende da posição correspondente à partícula sobre a qual atua, $\vec{r}_\alpha$ ($\vec{F}_1^{\text{ext}}$ depende

de $\vec{F}_1$, mas não de $\vec{F}_2, \vec{F}_3$, etc). Se $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$ for conservativa, podemos introduzir energia potencial a ela associada, e

$$\vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = -\nabla_\alpha U_\alpha^{\text{ext}}(\vec{r}_\alpha)$$

Pondo tudo junto:

$$U = U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} = (U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}) + (U_1^{\text{ext}} + U_2^{\text{ext}} + U_3^{\text{ext}} + U_4^{\text{ext}}), \text{ e}$$

$$\vec{F}_\alpha^{\text{res.}} = -\nabla_\alpha U. \quad \text{Veja Analise, por}$$

$$\text{exemplo, } \vec{F}_1^{\text{res.}} (= -\nabla_1 (U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_1^{\text{ext}})).$$

$$= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_1^{\text{ext}}$$

Além desta propriedade da energia potencial U assim definida, a energia total $E = T + U$ é conservada.

Para N partículas:

$$T = \sum_\alpha T_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

Se todas as forças são conservativas:

$$U = U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} = \sum_\alpha \sum_{\beta > \alpha} U_{\alpha\beta} + \sum_\alpha U_\alpha^{\text{ext}}$$

$$\vec{F}_\alpha^{\text{res.}} = -\nabla_\alpha U \quad \text{e} \quad E = T + U \text{ é conservada}$$

Se há forças não conservativas,

$$dE = W_{nc}$$

Corpos rígidos

$$T = T_{CM} + T_{rotação} \quad (\text{provaremos + tarde})$$

$$U^{int} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} U_{\alpha\beta} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \quad \text{e, se as}$$

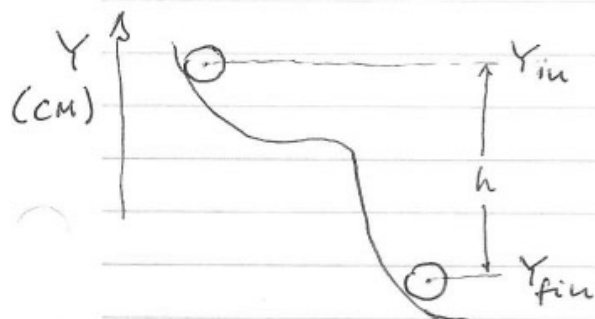
forças interatômicas são centradas,

$$U_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} (|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|)$$

Definição de corpo rígido: $\frac{d}{dt} |\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}| = 0$

$\Downarrow$
 U^{int} é constante e pode, portanto, ser ignorada $\rightarrow$ só precisamos nos preocupar com U^{ext} .

Exemplo: cilindro rolando para baixo numa rampa.



$$h = Y_{in} - Y_{fin}$$

Forças externas:
 normal e atrito
 (estático!) da

rampa - que não trabalham - e o peso, que é conservativo $\Rightarrow U^{ext} = Mgy$

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \quad I = \frac{1}{2} M R^2 \quad \text{e} \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v^2$$

$$\Delta T = -\Delta U^{ext} \Rightarrow \frac{3}{4} M v^2 = Mgh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$